MATEMATIČKI VESNIK
МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
Corrected proof
Available online 26.10.2017

research paper
оригинални научни рад

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ МНОГОМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА И ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Владимир Антонович Зорич

Анотация. Каждый, кто прослушал курс комплексного анализа, знает теорему Римана о конформном отображении, свидетельствующую о конформной гибкости областей двумерной плоскости (и вообще двумерной поверхности). В отличие от плоского случая, области пространства большей размерности оказываются в определённом смысле конформно жёсткими. Об этом говорит одна (менее популярная) теорема Лиувилля, открытая почти одновременно с упомянутой теоремой Римана. Мы приводим здесь одно из возможных доказательств этой теоремы, дополненное современной библиографией, содержащей другие подходы к этой теореме, а также её усиления и развития.

1. Два вводных слова

Когда готовилось первое издание ставшей широко известной книги Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, «Современная геометрия», Сергей Петрович Новиков попросил меня для этой книжки сообщить доказательство классической, но не очень широко известной, теоремы Лиувилля о конформной жёсткости областей пространства размерности выше двух. Я предложил доказательство Неванлинны, которое с некоторыми добавлениями будет изложено ниже. Авторы «Современной геометрии» адаптировали это доказательство к координатному стилю изложения, принятому в книге. Несколько более абстрактное (и не привязанное к координатам) исходное доказательство Неванлинны, наверное, выбивалось бы из контекста, но оно, как сможет увидеть читатель, имеет свои достоинства. Помимо того, что доказательство в каком-то смысле автономно (не требует отсылки к предварительно подготовленным существенным геометрическим понятиям и фактам), в нём идейная сторона не осложнена тем, что порой бывает в геометрических книгах, когда текст нагружен индексами координат, за которыми читатель тоже должен внимательно следить.

2010 Mathematics Subject Classification: 30C65
Keywords and phrases: Quasiconformal mapping; conformal rigidity.

И ещё одно небольшое воспоминание. Однажды у меня была лекция в университете Подгорицы, во время которой я как-то упомянул теорему Лиувилля о конформной жёсткости пространств. Один из слушателей, помню, очень настойчиво просил рассказать теорему подробно и с доказательством. Тогда до этого дело не дошло, поскольку разговор был совсем о другом. Зато сейчас, просмотрев изложенное ниже, и тот слушатель, и, возможно, кто-то другой, но такой же любознательный, смогут получить не только само доказательство, но и известную мне литературу на эту тему (первоисточники и современное развитие), которою я постарался собрать в библиографии.

2. Определение конформных преобразований метрики

В физике локальный (местный) выбор масштабов есть специальный вид калибровочных преобразований. В геометрии они известны под именем конформных преобразований метрики.

Напомним, что отображение $f\colon (X,g)\to(\tilde X,\tilde g)$ одного риманова многообразия в другое называется ***конформным***, если оно сохраняет углы, или, что то же самое, если оно локально (на уровне дифференциала) является гомотетией (подобием). Аналитически это можно записать в следующих эквивалентных формах (где $\tilde x = f(x)$):

(i) $d\tilde s(\tilde x) = \lambda(x) ds(x)$ – зависящее от точки, но не зависящее от направления (изотропное) изменение масштаба в точке x в $\lambda(x)$ раз (гомотетия или дилатация касательного пространства);

(ii) $\tilde g(\tilde x) = \lambda^2(x) g(x)$ или, точнее, $(f^*\tilde g)(x) = \lambda^2(x)g(x)$, где, как и выше, g и $\tilde g$ – метрические тензоры пространств X и $\tilde X$ соответственно, а $f^*\tilde g$ – запись $\tilde g$ в x-координатах (перенос $\tilde g$ в пространство X);

(iii) $\langle f'(x)\xi, f'(x)\eta\rangle_{\tilde g} = \lambda^2(x)\langle \xi,\eta\rangle_g$, где ξ,η – произвольные векторы касательного простантсва T_xX, а $f'(x)$ – касательное отображение (дифференциал f) в точке x.

Эти эквивалентные между собой записи определения конформности метрик и отображений применимы и в случае псевдоримановых метрик и пространств (например, для метрики Минковского).

3. Некоторые замечания и напоминания

3.1 Алгебра

Относительно любой билинейной формы $B(x,y)$ (помимо того, что $B(x,x) = \lambda^2\langle x,x\rangle$ влечет $B(x,y) = \lambda^2\langle x,y\rangle$) напомним еще, что если $\langle x,y\rangle = 0$ влечет $B(x,y)=0$, то $B(x,y) = \sigma\langle x,y\rangle$. Т.е. если форма B обращается в нуль на ортогональных векторах, то она пропорциональна скалярному произведению.

3.2 Анализ

Напомним привычные для современного анализа дифференциальные соотношения в евклидовом пространстве, которыми мы воспользуемся ниже при доказательстве основной теоремы:

$$f'(x)\xi = D_\xi f(x); \quad f''(x)(\xi,\eta) = D_\xi D_\eta f(x); \quad f'''(x)(\xi,\eta,\zeta) = D_\xi D_\eta D_\zeta f(x).$$

Слева стоят значения дифференциалов f первого, второго и третьего порядков в точке x на векторах ξ, η, ζ касательного пространства в этой точке, а справа эти же значения вычислены последовательным дифференцированием отображения f по указанным векторам.

Обе части этих равенств симметричны относительно порядка следования векторов.

Если e_i – единичный вектор, то позволим себе вместо $D_{e_i} f(x) = f'(x)e_i$ писать коротко $f_i(x)$, а вместо $D_{e_i} D_{e_j} f(x)$ писать $f_{ij}(x)$ и т.п.

3.3 Комментарий и история

Конформных отображений двумерных поверхностей много. Например, любые двумерные римановы пространства локально конформно эквивалентны. Это позволяет вводить на них конформно-евклидовы (изотермические) координаты, в которых метрика имеет вид $\lambda^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.

В 1851 году Риман показал, что вообще любая односвязная область на плоскости, отличная от самой плоскости, допускает конформное отображение на каноническую область – круг.

Почти тогда же, в 1850 году, Лиувилль обнаружил конформную жесткость областей пространств, показав, что в высших размерностях нет других конформных отображений, кроме "дробно-линейных": композиций перенесов, поворотов, гомотетий (диллатаций) и инверсий.

4. Теорема Лиувилля

Любое конформное отображение между областями евклидова (или псевдоевклидова) пространства размерности $n \geq 3$ есть композиция движения (изометрии) и гомотетии или инверсии.

Мы докажем теорему Лиувилля для гладких отображений (класса $C^{(4)}$) в пространстве любой (в том числе и бесконечной) размерности $n \geq 3$.

a) Пусть f – данное отображение. Проверим сначала, что для любой пары ортонормированных векторов e_i, e_j, вектор $f_{ij}(x)$ в любой точке x лежит в плоскости векторов $f_i(x), f_j(x)$.

Ввиду конформности отображения f нам достаточно, взяв единичный вектор e_k, ортогональный e_i и e_j, показать, что вектор f_{ij} ортогонален вектору $f_k = f'(x)e_k$.

Продифференцировав равенство $\langle f_i, f_j\rangle = 0$ по вектору e_k, получим

$$\langle f_{ik}, f_j\rangle + \langle f_i, f_{jk}\rangle = 0.$$

Ввиду равноправности индексов i, j, k, их циклической перестановкой получим еще два такие равенства. Складывая два равенства и вычитая третье, найдем, что $\langle f_{ij}, f_k\rangle = 0$, т.е. действительно $f_{ij} = \mu f_i + \nu f_j$, где вектори f_i, f_j ортогональны, $\mu = \langle f_{ij}, f_i\rangle/\langle f_i, f_i\rangle$, $\nu = \langle f_{ij}, f_j\rangle/\langle f_j, f_j\rangle$.

b) Пусть $\lambda^2(x) = \langle f_i, f_i\rangle(x)$. В силу конформности f верно также, что $\lambda^2 = \langle f_j, f_j\rangle$. В этих обозначениях

$$f_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda} f_i + \frac{\lambda_i}{\lambda} f_j,$$

где (по договорености) $\lambda_i = \lambda'(x)e_i$, $\lambda_j = \lambda'(x)e_j$.

c) Если положить $\rho = \lambda^{-1}$, то найденное разложение f_{ij} перепишется в виде $\rho f_{ij} + \rho_j f_i + \rho_i f_j = 0$. Отсюда вытекает, что

$$(\rho f)_{ij} = \rho_{ij} f + \rho f_{ij} + \rho_j f_i + \rho_i f_j = \rho_{ij} f \quad \text{и} \quad (\rho f)_{ijk} = \rho_{ij} f_k + \rho_{ijk} f.$$

Последнее равенство означает, что величина $\rho_{ij} f_k$ симметрична относительно i, j, k. Но вектори f_i, f_j, f_k не коллинеарны, значит $\rho_{ij} = 0$ для любой пары ортонормированных векторов e_i, e_j.

d) Следовательно $\rho''(x)(\xi, \eta) = \sigma(x)\langle \xi, \eta\rangle$ и $\rho'''(x)(\xi, \eta, \zeta) = D_\zeta \sigma(x)\langle \xi, \eta\rangle$, где теперь уже произвольные векторы $\xi, \eta, \zeta \in T_x R^n$ можно менять местами.

Значит $(D_{\xi_1}\sigma(x))\xi_2 = (D_{\xi_2}\sigma(x))\xi_1$ для любых, в том числе и не коллинеарных, векторов $\xi_1, \xi_2 \in T_x R^n$.

Это возможно только, если $D_\xi \sigma(x) = 0$ для любого вектора $\xi \in T_x R^n$.

Получается, что $\sigma(x) \equiv \text{const}$, и значит $\rho_{ij} = \sigma\delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$.

e) Таким образом, функция $\rho(x)$ имеет очень определенный вид:

$$\rho(x) = a_1\langle x - x_0, x - x_0\rangle + b_1.$$

Те же соображения, примененные к обратному отображению, дают

$$\lambda(x) = a_2\langle y - y_0, y - y_0\rangle + b_2, \text{ где } x = f^{-1}(y).$$

f) Поскольку $\rho\lambda \equiv 1$, получается, что отображение f удовлетворяет алгебраическому соотношению

$$(a_1|x - x_0|^2 + b_1)(a_2|y - y_0|^2 + b_2) = 1,$$

означающему, что f преобразует сферы в сферы.

Применяя, если надо, вспомогательные сдвиги, можно считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, т.е. $(a_1|x|^2 + b_1)(a_2|y|^2 + b_2) = 1$.

g) Ввиду конформности отображения f, лучи, ортогональные сферам с центром $x_0 = 0$, преобразуются в лучи, ортогональные сферам с центром $y_0 = 0$.

Поскоьку $|dy| = \lambda(x)|dx| = \rho^{-1}(x)|dx|$, то вдоль этих лучей с точностью до аддитивной постоянной имеем

$$|y| = \int^{|x|} \frac{dr}{a_1 r^2 + b_1}.$$

Функция $|y|$ алгебраически зависит от $|x|$, поэтому в последнем интеграле должно бить $a_1 = 0$, либо $b_1 = 0$.

h) Итак, в исходном, отвечающем конформности отображения f равенстве $|dy| = \lambda(x)|dx|$, возможно либо $\lambda(x) = b_1^{-1}$, либо $\lambda(x) = \frac{1}{a_1|x|^2}$.

В первом случае после вспомогательной гомотетии с коэффициентом b_1 мы приходим к изометрическому отображению пространства (когда $|dy| = |dx|$).

Во втором случае мы снова приходим к движению пространтва после вспомогательной инверсии $\frac{a_1 x}{\langle x,x\rangle}$.

Теорема доказана.

Литература

[1] P. P. Belinksiĭ, *Ustoĭchivost' v teoreme Liuvillya o prostranstvenyh kvazikonformnyh otobrazheniyah*, v sbornike: *Nekotorye problemy matematiki i mehaniki. Trudy konferencii, priurochennoĭ k semidesyatiletiyu akademika M.A. Lavrent'eva*, Akademiya nauk SSSR, Sibirskoe otdelenie, "Nauka", Leningrad, 1970, str. 88–102.

[2] P. P. Belinksiĭ, *O poryadke blizosti prostranstvenno kvazikonformnogo otobrazheniya k konformnomu*, Sib. mat. zhurn. **14** (1973), 475–483.

[3] A. V. Bicadze, *Osnovy teorii analiticheskih funkciĭ kompleksnogo peremennogo*, "Nauka", Moskva, 1984.

[4] B. Boyarski, T. Iwaniec, *Another approach to Liouville Theorem*, Math. Nachr., **107** (1982), 253–262.

[5] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, *Sovremennaya geometriya*, "Nauka", Moskva, 1979.

[6] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

[7] J. Liouville, *Extension au cas de trois dimensions de la question du tracé géographique*, Appendix 6 to the book: G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, Cinqiém édition, revue corrigée et annotée par J. Liouville. Bachelier, Paris, 1850, pp. 609–616.

[8] J. Liouville, *Théorème sur l'équation* $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)$, J. Math. Pures Appl. **1**, 15 (1850), 103.

[9] G. D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. IHES, **34** (1968), 53–104.

[10] R. Nevanlinna, *On differentiable mappings. Analytic functions*, Princeton Math. Series. **24** (1960), 3–9.

[11] S. P. Novikov, I. A. Taĭmanov, *Sovremennye geometricheskie struktury i polya*, MCNMO, Moskva, 2005, str. 369.

[12] Yu. G. Reshetnyak, *Teorema Liuvillya o konformnyh otobrazheniyah pri minimal'nyh predpolozheniyah regulyarnosti*, Sib. mat. zhurn. **8** (1967), 835–840.

[13] Ju. G. Reshetnyak, *Teoremy ustoĭchivosti v geometrii i analize*, "Nauka", Sib. otdelenie, Novosibirsk, 1982.

[14] Ju. G. Reshetnyak, *Prostranstvennye otobrazheniya s ogranichennym iskazheniem*, "Nauka", Novosibirsk, 1982.

(received 07.09.2017; in revised form 23.09.2017; available online 26.10.2017)

Московский государтвенный университет им М.В. Ломоносова

E-mail: vzor@mccme.ru

LIOUVILLE THEOREM ON CONFORMAL MAPPINGS OF DOMAINS IN MULTIDIMENSIONAL EUCLIDEAN AND PSEUDOEUCLIDEAN SPACES

Vladimir Antonovich Zorich

Abstract. Everybody who attended a course in complex analysis, knows Riemann Theorem on conformal mappings, demonstrating conformal flexibility of domains in the two-dimensional plane (more generally, in a two-dimensional surface). In contrast to the plane case, domains in spaces of dimension greater than two are conformally rigid. This is the content of a (less popular) Liouville theorem, which appeared almost in the same time as the mentioned Riemann theorem. Here we present one of the possible proofs of this theorem together with a contemporary bibliography containing new approaches to this theorem together with its generalizations and extensions.